

Лекция 7.

Квантово механическое рассмотрение задачи рассеяния. Метод Борна

Условие применения классического приближения следующее: Наименьшее расстояние между частицами должно быть больше длины волны де Бройля:

$$\lambda_B < a \qquad ka > 1$$

В этом случае волновой природой частиц можно пренебречь и воспользоваться классическим описанием. В противном случае необходимо учитывать их волновые свойства. Общий подход к расчету сечений реакции в квантовомеханическом описании заключается в получении волновой функции частицы после столкновения, если до этого она была известна.

В качестве примера рассмотрим упругое парное рассеяние. Пусть свободная частица, движущаяся в направлении оси до столкновения, описывается плоской волной $\Psi = e^{ikz}$. Рассеянная частица, находящаяся далеко от центра, должна описываться исходящей сферической волной вида $f(\theta) \exp(ikr)$, где функция угла рассеяния и называется амплитудой рассеяния. Таким образом, решение уравнения Шрёдингера, описывающего процесс рассеяния в поле должна иметь на больших расстояниях асимптотическую форму

$$\Psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

$$dS = r^2 d\Omega$$

$$v r^{-2} |f(\theta)|^2 dS = v |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \sin\theta |f(\theta)|^2 d\theta$$

Это выражение для дифференциального сечения рассеяния на единицу телесного угла в квантово-механическом приближении. Амплитуда рассеяния определяется так называемыми фазовыми сдвигами, поэтому её определение можно провести непосредственно с помощью уравнения Шрёдингера или более простого дифференциального уравнения Калоджеро. В данной лекции мы ограничимся частным случаем, когда поле рассеяния можно рассматривать как слабое возмущение. В этом приближении дифференциальное сечение рассеяния можно получить из формулы Борна (1926):

$$d\sigma = \frac{4\pi m^2}{h^4} \left| \int \Phi(r) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}} d\vec{r} \right|^2 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$k = k_0$$

$$\left| \vec{k} - \vec{k}_0 \right| = q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

Отмечено, что метод Борна справедлив, когда влияние рассеивающего центра мало, т.е. при рассеянии на малые углы, что может иметь место либо при большой относительной скорости падающих частиц, либо при больших прицельных параметрах.

Для центрально-симметричного потенциала

$$f = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^{\infty} \Phi(r) \sin(qr) r dr$$

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2 (Z_1 Z_2)^2 e^4}{16 p^4 \sin^4(\theta/2)}$$

For other potentials a such coincidence is not observed. For the case of the Debye-Hückel potential the formula for the differential cross section in the Born approximation is the following:

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2 (Z_1 Z_2)^2 e^4}{(\hbar^2 / r_d^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2}$$

If we compare these expressions one can see that in the limit of $\theta \rightarrow 0$ the cross section for the Coulomb potential diverges, while for the potential of the Debye-Huckel discrepancy disappears. Because of its relative simplicity, the Born approximation is often used to estimate the cross sections of the different collision reactions.